

1.

管制圖技術結合了圖形和統計檢定原理，被用來偵測 assignable cause 所導致的資料變異。Tukey's control chart 採用單一觀測值檢驗，並以四分位數(quartiles)設置管制界限，其設置方法簡單且容易使用。Alemi (2002)將 Tukey's control chart 應用在醫療產業監控病人的病歷資料，由於病歷的資料數量甚少，無法準確的配適(fit)母群體的機率分配，所以 Alemi (2002)直接從數據計算 quartiles 和設置 Tukey's control chart 的管制界限。管制圖的監控績效(performance)必須在機率分配已知的情形下才能進行客觀，由於 Alemi (2002)的研究缺少機率分配假設，所以，無法評估出 Tukey's control chart 的監控績效，而目前尚未發現探討 Tukey's control chart 監控績效評估的相關研究。

Average run length (ARL)適合做為固定抽樣間隔和抽樣數的管制圖績效指標，過去曾被用來呈現 Shewhart, EWMA and CUSUM 等管制圖的製程監控能力，ARL 是基於特定的機率分配假設下，應用統計手法來呈現管制圖偵測製程變異和發生 false alarm 的期望抽樣次數，會比製程誤判機率更清楚表達出管制圖的監控能力，所以，ARL 是管制圖研究常用的評估指標。

在製造業中，連續生產製程或者化學溶液的生產製程，每次抽樣僅能獲得單一觀測值，此類型製程必須採用個別值管制圖(individual control chart)監控製程平均數。Tukey's control chart 屬於 individual control chart 的一種，適合用來監控單一觀測值製程的平均數變異。不同的產業製程，對於管制圖的績效要求也會有所不同，在大多數的製造業製程監控中，會要求管制圖在穩定製程必須平均抽樣 370.4 次才能發生一次 false alarm(表示穩定製程的 $ARL=370.4$)，因而大多數管制圖的研究在此基準下決定管制界限的寬度，而 Alemi (2002)未曾評估 Tukey's control chart 的 ARL，所以他所決定的管制界限寬度未必能適用於製造業的製程監控，因此 Tukey's 管制界限寬度必須要根據製程監控需求而重新決定。

過去的研究中，常態分配一直是使用管制圖監控製程的基本假設，當觀測值嚴重違反了常態分配假設時，管制圖的製程監控績效會受到影響，Borrer et al. (1999); Stoumbos & Reynolds (2000); Calzada & Scariano (2001)曾以 gamma 分配作為非對稱分配和 t 分配作為對稱分配探討管制圖在非常態下的績效，從結果發現到，大多數的管制圖在非常態製程監控的績效會明顯的比常態假設下還要差。因此必根據不同的機率分配來決定管制界限寬度，才能讓穩定製程的 ARL 維持在 370.4。當 Tukey's control chart 用在非常態製程的監控時，必須重新決定管制界限寬度，讓穩定製程的 ARL 維持在 370.4，並評估偵測偏移的能力。

製造業的資料收集通常會比醫療產業更加容易，在長時間的生產製造過程能夠收集到大量的製程觀測值，從大量的觀測值可以精確的配適(fit)母體的機率分配和參數，許多管制圖的研究(He et al., 2002; Lin & Chou, 2007)在探討統計性設計問題時，均假設已獲得正確的母體機率分配，透過機率分配設置管制界限和計算監控能力指標。

基於上述動機，本研究將 Tukey's control chart 應用在製造業製程監控，假設母群

體機率分配在已知情況下設置 Tukey's control chart，並建構 ARL 的計算方法。本研究分別假設母體為常態、gamma 和 t 分配，以穩定製程的 ARL=370.4 為基準決定 Tukey's control chart 的最佳管制界限參數，和測試 Tukey's control chart 的偵測變異能力，評估常態與非常態假設下的製程監控績效。

2.

應用管制圖於製程監控，管制圖必須根據製程監控需求調整管制界限寬度，基於管制圖的統計性設計觀點，管制界限的參數會從能容許的製程誤判機率來決定，由於製程狀態可分成管制內製程($\delta=0$)和製程發生變異($\delta\neq 0$)，所以，Tukey's control limits 的參數 k 可以由 type 1 error 或者 type 2 error 誤差來決定。假設在穩定製程狀態下，發生 type 1 error 機率的必需符合容忍值 α ，可表示為

$$1 - \int_{F^{-1}(0.25) - k \times IQR}^{F^{-1}(0.75) + k \times IQR} f(x) dx = \alpha \quad (8)$$

若重視製程平均數偏移 $\delta\sigma$ 的偵測效率，則讓 type 2 error 機率的必需符合容忍值 β ，可表示為

$$1 - \int_{F^{-1}(0.25) - k \times IQR - \delta\sigma}^{F^{-1}(0.75) + k \times IQR - \delta\sigma} f(x) dx = 1 - \beta \quad (9)$$

讓 Eq.(8) 或 Eq.(9) 中的 k 為決策變數，以 Newton-Raphson method 求解數學式，既可獲得最佳的 k 值。由於 Tukey's control chart 是個別值管制圖的一種，無法藉由增加樣本數來降低 type 2 error 機率，由此可知，Tukey's control chart 統計性設計無法讓 type 1 error 和 type 2 error 同時達到最小化，若降低其中一種製程狀態的誤判機率，則另外一種製程狀態誤判機率勢必會增加，因此只需從 Eq.(8) 和 Eq.(9) 選擇其中一個數學式來決定 k 值既可，若重視降低穩定製程的誤判機率，應選擇 Eq.(8) 求解 k 值，若重視製程變異的偵測效率，則應選擇 Eq.(9) 求解 k 值。許多的研究會將管制圖的 type 1 error 機率設 $0.0027(ARL(\delta=0)=370.4)$ 為一共同標準值，再評估偵測變異的能力，若要讓 Tukey's control chart 的 type 1 error 機率達到 0.0027，則應使用 Eq.(8) 來決定 k 值。

3. An example

某化學原料製程，監控化學原料的濃度，每次檢樣均量測一筆濃度值，從過去一年生產作業中，收集到 500 筆穩定製程的觀測值，以 Kolmogorov-Smirnov 檢定得知觀測值服從常態分配(P-value = 0.75)， $\mu=33.52$ ， $\sigma=0.423$ ，若未來要應用 Tukey's control chart 監控製程，且對於平均數偏移 $2\sigma(\delta=2)$ 的誤判機率必須要小於 0.6667($\beta=0.6667$)，決定管制界限的 k 值，並評估 type 1 error 機率值。

讓 $f(x)$ 為常態分配的 PDF，其參數 $\mu=33.52$ 和 $\sigma=0.423$ ，讓 p 分別等於 0.25 和 0.75 帶入 Eq.(5)，獲得 $F^{-1}(0.25) = 33.23469$ 和 $F^{-1}(0.75) = 33.80531$ ， $IQR=0.570618$ ，將 $F^{-1}(0.25)$ 、 $F^{-1}(0.75)$ 和 IQR 帶入 Eq.(9)，並令 $\delta=2$ 、 $\beta=0.6667$ ，以 k 為決策變

數求解 Eq.(9)，可以得到 $k=1.302$ 。再令 $\delta=0$ ，將 $F^{-1}(0.25)$ 、 $F^{-1}(0.75)$ 、 k 和 IQR 帶入 Eq.(7)，可得到 type 1 error 機率為 $0.0151(ARL(0)=66.39)$ 。

4.

本章節將根據上一節所選擇的機率分配計算 Tukey's control chart 的 ARL。當母體為 $a=4, b=1$ 的 gamma 分配時，其標準差為 2， $F^{-1}(0.25)$ 和 $F^{-1}(0.75)$ 分別為 2.5353 和 5.1094， $IQR=2.5741$ ，由應用 Eq.(6) 計算出 $UCL=8.9706$ 和 $LCL=-1.3258$ 。將 UCL 、 LCL 、 $\delta=0$ 和 $\sigma=2$ 帶入 Eq.(7)，令 Eq.(7) 的 $f(x)$ 為 $a=4, b=1$ 的 gamma 分配的 PDF，可得到 $\text{Gam}(4,1)$ 的 $P(\delta=0)=0.0217$ ，其 $ARL(\delta=0)=46.14$ 。將此 ARL 計算方法推廣到其他機率分配，可得到表 1 的結果。

從表 1 可知，各機率分配假設下的 $ARL(\delta=0)$ 和 $ARL(\delta\neq 0)$ 均不相等，無法比較各機率分配假設下的製程監控能力。接下來，本研究調整 k 值，讓 Tukey's control chart 的 $ARL(\delta=0)$ 近似於 370.4，比較 $ARL(\delta\neq 0)$ ，探討各機率分配假設下的偵測能力之差異，令 Eq.(8) 的 $\alpha=0.0027$ ，然後將各機率分配的 PDF 帶入 Eq.(8) 的 $f(x)$ ，求解 k 值，並計算出各偏移量的 ARL，其結果如同表 2 所示。

表 2 中，Tukey's control chart 在各機率分配假設下的 $ARL(\delta=0)$ 都近似 370.4，比較各偏移量的 ARL 可發現到，當母體的機率分配假設越遠離常態分配時，Tukey's control chart 偵測製程變異的效率會越差，特別是 $\text{Gam}(1,1)$ 和 $t(4)$ 兩個機率分配會越遲緩。

表 2 也秀出了 Shewhart's individual control charts 的 ARL，Shewhart's individual control charts 使用 $\mu \pm k\sigma$ 設置管制界限，在常態假設下， $k=3$ 的 Shewhart's individual control charts 的 $ARL(\delta=0)=370.4$ ，我們也修改 Shewhart's individual control charts 的 k ，讓 Shewhart's individual control charts 在各機率分配假設下的 $ARL(\delta=0)$ 近似 370.4，計算出各偏移量的 ARL。從表 2 可發現，Shewhart's individual control charts 和 Tukey's control chart 具有相同的製程監控能力。

5.

Tukey's control chart 是個別值管制圖的一種，其採用 quartiles 的方式設置管制界限，由於設置方法相當簡單且容易使用，過去被應用在醫療產業的資料監控。而本研究將 Tukey's control chart 應用到製造業的製程監控，假設製程的母體機率分配可以透過大量的歷史數據配適得到，在已知的機率分配設置 Tukey's control chart 管制界限，和發展出計算 average run length 的計算式。經過 ARL 比較後發現，Tukey's control chart 與 Shewhart's individual control chart 具有相同的製程監控績效。當製程觀測值嚴重違反了常態假設時，Tukey's control chart 偵測製程變異會比常態假設還要遲鈍。因此，建議應用 Tukey's control chart 監控非常態製程時，應當先將觀測值轉換成近似常態分配數據(例如: Box & Cox (1964) 的方法)，再進行管制界限設置和製程監控，以提升偵測製程變異的績效。當製程觀測值不容易收集，無法精確的配適出母體的機率分配時，則必須使用少

量的觀測值設置 Tukey's control chart，此監控能力勢必與本研究所呈現的數值有所差異，未來的研究可朝向此方面更進一步探討。

一祥翻譯社 樣本
Elegant Translation Service Sample
請勿複製
Do not copy